２０２６年度　岡山理科大学大学院　修士課程一般入試（II 期）
理工学研究科 自然科学専攻 数理科学コース（解答用紙）

専門科目〔線型代数学〕　　１／４

$\boxed{\mathbf{1}}$ (解答)

(1) 固有多項式を計算すると,

$$|xI - A| = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 0 \\ 2 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3)(x-2)^2$$

であり, 固有値は $\lambda = 2, 3$.

$\lambda = 2$ について, 固有空間 V_2 の次元を求める.

$$2I - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{階段化}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, $\operatorname{rank}(2I - A) = 2$ より, $\dim V_2 = 3 - \operatorname{rank}(2I - A) = 3 - 2 = 1$.

固有多項式における $\lambda = 2$ の重複度が 2 であるのに対して, 固有空間の次元が 1 なので, 対角化不可能.

(2) $|A_n| = n + 1$.

n に関する帰納法で証明する.

(i) $n = 1$ のとき, $|A_1| = |2| = 2 = 1 + 1$ より成立.
$n = 2$ のとき, $|A_2| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 = 2 + 1$ より成立.

(ii) $n \geq 3$ とし, $n-1, n-2$ の場合に成立すると仮定する. A_n の 1 行目に沿って余因子展開をすると,

$$\begin{aligned} |A_n| &= 2|A_{n-1}| - |A_{n-2}| \\ &= 2((n-1)+1) - ((n-2)+1) \qquad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= n + 1 \end{aligned}$$

以上より, $|A_n| = n + 1$.

(3) **(i)**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{階段化}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であることから, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が V の基底であり, $\dim V = 2$.

(ii) $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ は明らかに 1 次独立であり, W の基底である. $\boldsymbol{w} \in V \cap W$ とすると,

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = d_1\boldsymbol{y}_1 + d_2\boldsymbol{y}_2$$

を満たす c_1, c_2, d_1, d_2 が存在する. 斉次連立方程式

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 - d_1\boldsymbol{y}_1 - d_2\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$$

を解くと, $c_1 = c_2 = d_1 = d_2$ となり, $\boldsymbol{w} = d_2(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)$.
よって, $\dim V \cap W = 1$.

受　験　番　号

2 **(1)** λ を A の固有値, $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ を A の λ に属する固有ベクトルとすると

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

一方で, $A = A^2$ より

$$A\boldsymbol{v} = A^2\boldsymbol{v} = A(A\boldsymbol{v}) = A(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(A\boldsymbol{v}) = \lambda(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}$$

よって, $\lambda\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}$, $\lambda^2 - \lambda = 0$ $(\because \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})$, $\lambda = 0, 1$.
よって固有値が取りえる値は $\lambda = 0, 1$.

(2) $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} f$ とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立. この時,

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A+B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} + B\boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x})$$

が成立し, $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} g$.
仮定より

$$\begin{aligned} A + B &= E \\ A(A+B) &= A \\ A^2 + AB &= A \\ AB &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

が成立する. ここで $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Im} g$ とすると, $x = g(\boldsymbol{y}) = B\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ が存在.
この時,

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A(B\boldsymbol{y}) = (AB)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

よって, $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker} f$ が成立.
よって, $\mathrm{Ker} f = \operatorname{Im} g$

(3) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} A$, $\dim \operatorname{Im} g = \operatorname{rank} B$ である.
また, (2) により $\mathrm{Ker} f = \operatorname{Im} g$ であり, $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} g = \mathrm{rank} B$.
次元公式より,

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f &= n \\ \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B &= n \end{aligned}$$

受　験　番　号

２０２６年度　岡山理科大学大学院　修士課程一般入試（II 期）
理工学研究科 自然科学専攻 数理科学コース（解答用紙）

1 **(1)**

$$R_n = e^{\theta x}\frac{x^n}{n!}, \quad \theta \in (0,1)$$

(2) $s \in \mathbb{N}$ に対して不等式

$$\left|\frac{x}{2k+s}\right| \leq \frac{1}{2}$$

が成立することに注意すると

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \cdot \left|\frac{x^{n-2k}}{n!/(2k)!}\right| \leq \frac{k^{2k}}{(2k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

となる.

(3) $\theta \in (0,1)$ であることと, $|x| \leq k$ であるような $k \in \mathbb{N}$ に対して $e^{\theta x} \leq e^k$ である. また (2) より $k < n$ を満たすような十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|R_n| \leq e^k \frac{k^{2k}}{(2k)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k}$$

となるので $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ である.

2 **(1)** $f_x(x,y) = -2xe^{-(x^2+2y^2)}, \quad f_y(x,y) = -4ye^{-(x^2+2y^2)}$.

(2) $(x,y) = (0,0)$

(3)

$$H = e^{-x^2-2y^2}\begin{pmatrix} 4x^2-2 & 8xy \\ 8xy & 16y^2-4 \end{pmatrix}$$

なので原点での値は

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

となり $(0,0)$ で極大値 1 をとる.

3 変数変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

を行うと領域 D は

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

と円環領域となり, 求める積分は $dxdy = rdrd\theta$ に注意すると

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\log r\,dxdy \\ &= \left(\log 2 - \frac{3}{8}\right)\pi \end{aligned}$$

となる.

受　験　番　号