

問1. 関数  $f(x, y) = (x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 + 2(x - 1)(y + 2)$  に対して、以下の問いに応えよ。

(1) 関数の極値を求めなさい。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8y + 14 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

$$x + 4y + 7 = 0$$

$$-y - 1 + 4y + 7 = 3y + 6 = 0$$

$$x = 1, y = -2$$

(2) 極値の種類 (極大値または極小値) を判定しなさい。

ヘッセ行列  $H$

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 8, f_{xy} = f_{yx} = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{判別式 } D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12 > 0$$

問2. 関数  $f(x) = e^{ax} \cos(bx)$  について以下の問いに答えなさい

(1) 定数  $a, b$  が変化するとグラフの形状はどのように変わるか。  $a, b$  それぞれの効果を分けて説明しなさい。

指数関数と余弦関数の積 :  $a$  の影響 (包絡線の形状)  $b$  の影響 (周期の変化)

$a > 0$  : グラフは振動しながら増加 (振幅が拡大)

$a = 0$  : 単なる  $\cos(bx)$  一定振幅で周期的

$a < 0$  : 振幅が指数的に減衰する (減衰振動)

$b > 0$  : 周期が  $\frac{2\pi}{b}$

$b$  が大きくなると : 振動が速くなる (波の密度が高くなる)

$b < 0$  : 周期は正の場合と同じ

(2)  $a = 1, b = 1$  の特殊な場合について、関数を区間  $[0, t]$  で積分しなさい。

$$\frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}$$

(3) (2) の定積分の値が 0 となるおおよその  $t$  について述べ (どの象限に入るか)、グラフの概要を説明しなさい。

$$t \sim 2.284 = \frac{8\pi}{11} \quad \text{第2象限}$$

振動しながら増加するが、 $t \sim 2.28$  以降は負の寄与が大きいため負に沈む

受験番号	

問3. 以下の行列  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  に対して、以下の問いに答えよ。

(1) 行列  $A$  の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 = 3$  のとき

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$  のとき

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) この行列による線形変換が、2次元空間上のベクトルに対してどのような幾何的操作 (例: 回転、拡大、縮小、引き伸ばし、向きの変化など) を行っているかを、固有ベクトルと固有値をもとに説明せよ。

行列  $A$  は、(回転を伴わない) 斜め方向への拡大縮小を行う線形変換である。

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  の方向に 3 倍

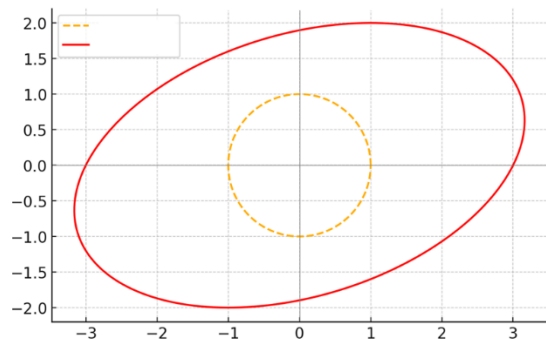
$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  の方向に 2 倍

例:  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  に対して、 $A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  方向は変わらず 3 倍に長くなる

(3) 単位円上の点に対してこの変換を適用すると、どのような図形になるか、おおよその図を描いて説明せよ。

単位円上の点 (全方向に向いた長さが 1 のベクトル) に行列  $A$  の線形変換をすると楕円になる。

点(3, 0)、(-3, 0), (1, 2), (-1, -2)などを通る楕円、右上がり左下がりなどが描けると良い



受験番号	総点

【問題1】 (配点: 30点)

(1) 0.75 は2進数で

$$0.75_{10} = 0.11_2 = 1.1_2 \times 2^{-1}$$

よって、実際の指数は十進数で  $e = -1$  (10点)

(2) IEEE754 の仮数部は正規化された方の小数点部分を格納する。(1)により,  $0.75 = 1.1_2 \times 2^{-1} \rightarrow$  仮数部は 1.1  $\rightarrow$  小数点以下は 10000 となり, よって先頭の5ビットは: 10000 (10点)

(3) 単精度ではバイアスは 127 なので

$$-1 + 127 = 126$$

$$126_{10} = 01111110_2$$

したがって8ビットの指数部は: 01111110 (10点)

【問題2】 (配点: 30点)

左辺に着目し, ド・モルガンの法則を適用する:

$$\overline{A+B \cdot C} = \overline{A} \cdot \overline{B \cdot C} \quad (\text{ここまでの15点})$$

更に, ド・モルガンの法則を適用する:

$$= \overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C}) \quad (\text{ここまでの30点})$$

となり, 右辺と一致する.

【問題3】 (配点: 40点)

カルノー図を書く:

	CD	00	01	11	10
AB					
00		1	0	0	1
01		0	1	1	0
11		0	1	1	0
10		1	0	0	1

となる. (ここまでの20点)

次にグループ化をする.

m(0), m(2), m(8), m(10)をグループ化する. すると共通部分が B=0, D=0 となり項が  $\overline{B} \cdot \overline{D}$  となる.

m(5), m(7)をグループ化すると, 共通部分が A=0, B=1, C=1 となり項が  $\overline{A} \cdot B \cdot C$  となる.

m(13), m(15)をグループ化すると, 共通部分が A=1, B=1, C=1 となり項が  $A \cdot B \cdot C$  となる.

したがって最小項の論理式は

$$F(A, B, C, D) = \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

となる. (ここまでの40点)

【グループ化の別解】

m(0), m(2), m(8), m(10)をグループ化する. すると共通部分が B=0, D=0 となり項が  $\overline{B} \cdot \overline{D}$  となる.

m(5), m(7), m(13), m(15)をグループ化すると, 共通部分が B=1, C=1 となり項が  $B \cdot C$  となる.

したがって最小項の論理式は

$$F(A, B, C, D) = \overline{B} \cdot \overline{D} + B \cdot C$$

となる. この場合, 論理式にすべての変数が現れていない (Aがない) ので, 厳密には簡略化 (Sum of Products) とは言えない. しかし正解としても構わない.

受験番号	総点

## 解答例

1.(20)

並び替え前は

i=-1: 9 4 2 5 8 10 7 1 6 0 3

-----

i= 1: 9 4 2 5 8 10 7 1 6 0 3

i= 2: 9 4 2 5 8 10 7 1 6 0 3

i= 3: 9 5 4 2 8 10 7 1 6 0 3

i= 4: 9 8 5 4 2 10 7 1 6 0 3

i= 5: 10 9 8 5 4 2 7 1 6 0 3

i= 6: 10 9 8 7 5 4 2 1 6 0 3

i= 7: 10 9 8 7 5 4 2 1 6 0 3

i= 8: 10 9 8 7 6 5 4 2 1 0 3

i= 9: 10 9 8 7 6 5 4 2 1 0 3

i=10: 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

探索する数字: 4

入力した値は添え字 6 にあります。

2.(10)

min=0, mid=5, max=10

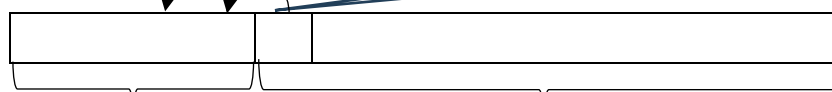
min=6, mid=8, max=10

min=6, mid=6, max=7

3.(10+10+20)

(1) 挿入ソート

(2)



大きい順になっている部分

まだ順序が整列されていない部分

(説明) 図のように左側が大きい順になっている部分で、右側が元もままの状態を考える。右側の先頭の値を  $a$  として直前と比較して  $a$  が大きいなら入れ替える。入れ替えた後も、同様に直前と比較して  $a$  が大きいならば直前と入れ替える。これを繰り返すと、 $a$  の直前は  $a$  以上であり、 $a$  の後ろは  $a$  未満になるので、左の列が 1 つ増えて大きい順になっている。この操作を右の最後まで続ける。開始は、整列前の列全体の左端 1 個を整列済みとして扱う。

(3) (下記は選択ソートの場合、その他のソートでも可)

```
void sort(void){
    int i, j, temp;
    for(i=0; i<N-1; i++){
        int max_idx = i;
        for(j=i+1; j<N; j++){
            if(a[j] > a[max_idx]){
                max_idx = j;
            }
        }
    }
}
```

```
if(max_idx != i){ // 無条件で入れ替えても良い
    temp = a[i];
    a[i] = a[max_idx];
    a[max_idx] = temp;
}
disp(i);
}
```

#### 4.(10+10+10)

(1) 2分探索 (バイナリーサーチ)

(2) 全体が降順になっている配列  $a$  に対して、求める数  $x$  とすると、 $a$  の中央値と  $x$  を比較し、 $x$  が大きければ、左列を全体として再度、中央値と比較し、 $x$  が小さければ、右列を全体として再度、中央と比較する。以上を繰り返すことで、 $x$  と等しければその添え字を返し、最後までループすれば、値が無で、-1 を返す。

(3)  $N$  に対して、列の長さが  $N/2, N/2^2, N/2^3, \dots, N/2^k = 1$  となるところで停止する。

つまり、 $2^k = N$  で最大回数となる。

両辺を 2 の対数を取ると、 $k = \log_2(N)$  となり、探索回数は  $\log_2(N)$  が最大である。

### (1) 完全グラフ $K_n$ の辺の数とその証明

$n$ 個の点からなる完全グラフ  $K_n$  の辺の数は、以下の式で示されます。

$$\text{辺の数} = \frac{n(n-1)}{2}$$

#### 【証明】

グラフの辺は、2つの異なる点を結ぶ線分です。完全グラフ  $K_n$  は、 $n$ 個の点のうち、どの2つの点の組み合わせについても辺が接続されているグラフです。したがって、 $K_n$  の辺の数は、 $n$ 個の点から2つの点を選ぶ組み合わせの総数に等しい。

よって、 ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$  となる。

(2)  $G_B$  の隣接行列は、次の通り。

0 1 0 1

1 0 1 0

0 1 0 1

1 0 1 0

(3) 隣接行列の各列の合計は、各点からの辺の接続数を表す。次数ともいう。

(4)  $A(G_a)^2$  は、連結する2つの辺を辿って到達できる節点を表す。

(5) 隣接行列  $A(G_b)^4$  における対角要素は、4つの辺を辿ってできる閉路の有無を表す。

(6) 完全グラフ  $K_n$  の点の数  $n$  が偶数の場合は各点の次数が奇数となるため、オイラー閉路を持たない。奇数の場合、各点の次数が偶数となるため、オイラー閉路を持つ。

(7)  $v_1$  から  $v_5$  への経路を考える。

①  $v_1, v_2, v_5$  の経路の場合: 経路合計 10

②  $v_1, v_4, v_5$  の経路の場合: 経路合計 15

③  $v_1, v_2, v_3, v_5$  の経路の場合: 経路合計  $4 + f(v_2, v_3) + f(v_3, v_5)$  は、問題の条件から①の10未満とならないといけない。

④  $v_1, v_4, v_3, v_5$  の経路の場合: 経路合計  $7 + 1 + f(v_3, v_5)$  は、③のより小さくならないといけないため、 $4 + f(v_2, v_3) + f(v_3, v_5) > 7 + 1 + f(v_3, v_5)$  とならないといけない。

よって、 $4 + f(v_2, v_3) + f(v_3, v_5) < 10$  と  $f(v_3, v_5) + f(v_2, v_3) > f(v_3, v_5) + 4$  を満たす  $f(v_2, v_3)$  と  $f(v_3, v_5)$  を求めることになる。条件をまとめると  $f(v_2, v_3) + f(v_3, v_5) < 6$ ,  $f(v_2, v_3) > 4$  となり、条件を満たす自然数は存在しない。

**【問1】**

求める水平2関節形ロボットのヤコビ行列  $J(q)$  は、

$$J(q) = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

となる。

**【問2】**

水平2関節形ロボットの特異姿勢は、

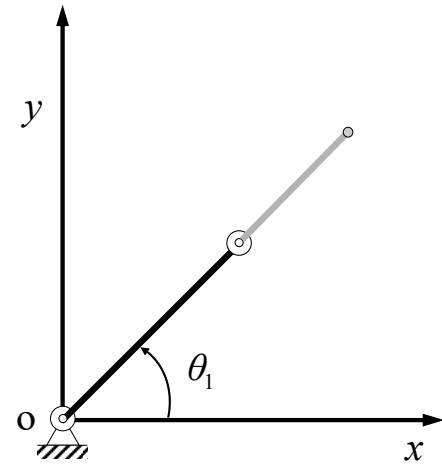
$$\det\{J(q)\} = L_1 L_2 \sin \theta_2 = 0$$

を満たす必要がある。

ここで、リンク長は  $L_1 \neq 0$ ,  $L_2 \neq 0$  であるため、

$$\sin \theta_2 = 0$$

を満たす  $\theta_2 = 0$  ( $\because -\pi/2 < \theta_2 < \pi/2$ ) となる。



特異姿勢【問2】の解答例

**【問3】**

$\theta_1 = \pi/4$  rad で、第2リンクの関節が  $x$  軸と平行な姿勢であるためには、

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{4} \quad \because \theta_1 + \theta_2 = 0$$

である必要がある。

外力  $F$  によって生じる駆動トルク  $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$  は、

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = J^T(q) \cdot F = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}L_1}{2} & \frac{\sqrt{2}L_1}{2} + L_2 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{2}L_1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる。

受験番号	総点

**問題1（2点×30個=60点）**

(ア) 16	(イ) 21	(ウ) 2	(エ) 24	(オ) 7	(カ) 14	(キ) 30	(ク) 10	(ケ) 23	(コ) 9
(サ) 29	(シ) 15	(ス) 19	(セ) 26	(ソ) 22	(タ) 12	(チ) 8	(ツ) 18	(テ) 28	(ト) 5
(ナ) 13	(ニ) 11	(ヌ) 27	(ネ) 3	(ノ) 1	(ハ) 25	(ヒ) 6	(フ) 17	(ヘ) 20	(ホ) 4

**問題2（(1)6点×1個=6点、(2)7点×2個=14点）**

(1)

$$\Delta W = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3 + \Delta w_4$$

$$= (100\text{mV} + 200\text{mV} + 50\text{mV} + 150\text{mV}) \times 0.004\text{N/mV} = 2\text{N}$$

(2)

$$x = (\Delta w_2 + \Delta w_4)a / \Delta W = (200\text{mV} + 150\text{mV}) \times 0.004\text{N/mV} \times 200\text{mm} / 2\text{N} = 140\text{mm}$$

$$y = (\Delta w_3 + \Delta w_4)b / \Delta W = (50\text{mV} + 150\text{mV}) \times 0.004\text{N/mV} \times 140\text{mm} / 2\text{N} = 56\text{mm}$$

**問題3（2点×10個=20点）**

(ア) 3	(イ) 5	(ウ) 4	(エ) 2	(オ) 7	(カ) 8	(キ) 1	(ク) 9	(ケ) 10	(コ) 6
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	-------

受験番号	総点