

問1. 関数 $f(x, y) = (x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 + 2(x - 1)(y + 2)$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) 関数の極値を求めなさい。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8y + 14 = 0$$

$$x + y + 1 = 0$$

$$x + 4y + 7 = 0$$

$$-y - 1 + 4y + 7 = 3y + 6 = 0$$

$$x = 1, y = -2$$

(2) 極値の種類 (極大値または極小値) を判定しなさい。

ヘッセ行列 H

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 8, f_{xy} = f_{yx} = 2$$

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{判別式 } D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 12 > 0$$

問2. 関数 $f(x) = e^{ax} \cos(bx)$ について以下の問いに答えなさい

(1) 定数 a, b が変化するとグラフの形状はどのように変わるか。 a, b それぞれの効果を分けて説明しなさい。

指数関数と余弦関数の積 : a の影響 (包絡線の形状) b の影響 (周期の変化)

$a > 0$: グラフは振動しながら増加 (振幅が拡大)

$a = 0$: 単なる $\cos(bx)$ 一定振幅で周期的

$a < 0$: 振幅が指数的に減衰する (減衰振動)

$b > 0$: 周期が $\frac{2\pi}{b}$

b が大きくなると : 振動が速くなる (波の密度が高くなる)

$b < 0$: 周期は正の場合と同じ

(2) $a = 1, b = 1$ の特殊な場合について、関数を区間 $[0, t]$ で積分しなさい。

$$\frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}$$

(3) (2) の定積分の値が 0 となるおおよその t について述べ (どの象限に入るか)、グラフの概要を説明しなさい。

$$t \sim 2.284 = \frac{8\pi}{11} \quad \text{第2象限}$$

振動しながら増加するが、 $t \sim 2.28$ 以降は負の寄与が大きいため負に沈む

受験番号

問3. 以下の行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) 行列 A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$$

$\lambda_1 = 3$ のとき

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ のとき

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) この行列による線形変換が、2次元空間上のベクトルに対してどのような幾何的操作(例:回転、拡大、縮小、引き伸ばし、向きの変化など)を行っているかを、固有ベクトルと固有値をもとに説明せよ。

行列 A は、(回転を伴わない) 斜め方向への拡大縮小を行う線形変換である。

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の方向に 3 倍

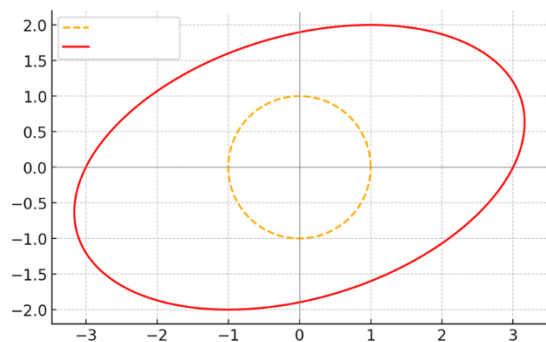
$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の方向に 2 倍

例: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して、 $A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 方向は変わらず 3 倍に長くなる

(3) 単位円上の点に対してこの変換を適用すると、どのような図形になるか、おおよその図を描いて説明せよ。

単位円上の点(全方向に向いた長さが1のベクトル)に行列 A の線形変換をすると楕円になる。

点(3, 0)、(-3, 0), (1, 2), (-1, -2)などを通る楕円、右上がり左下がりなどが描けると良い



受験番号

総点

[1] (1)

```
double func1(double a[], double b[])
{
    return sqrt((a[0] - b[0]) * (a[0] - b[0]) + (a[1] - b[1]) * (a[1] - b[1]));
}
```

(2)

```
int func2(int n, int r)
{
    int ans = 1, i;
    for (i = 0; i < r; i++)
    {
        ans *= (n - i);
    }
    return ans;
}
```

(3)

```
double func3(double d[], double num)
{
    int i;
    double max = d[0];
    for (i = 1; i < num; i++)
    {
        if (max < d[i])
        {
            max = d[i];
        }
    }
    return max;
}
```

[2]

```
while (s[i] != '\0')
{
    d[6 - i] = s[i];
    i++;
}
d[7] = '\0';
```

受験番号

[3]

```
#include <stdio.h>

int main(void)
{
    double a = 2.0, b = 5.0, c = 4.0;
    double D;

    printf("2次方程式%.0f x * x + %.0f x + %.0f = 0 のとき, ¥n", a, b, c);

    D = b * b - 4 * a * c;

    if (D > 0)
    {
        printf("2次方程式と x 軸は異なる 2 点で交わる. ¥n");
    }
    else if (D == 0)
    {
        printf("2次方程式と x 軸は 1 点で接する. ¥n");
    }
    else
    {
        printf("2次方程式と x 軸は共有点を持たない. ¥n");
    }

    return 0;
}
```

受験番号

総点