$\boxed{1}$ (解答)

(1) 固有多項式を計算すると,

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ -2 & x-4 & 4 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3-5x^2+8x-4=(x-1)(x-2)^2$$

よって, 固有値は固有多項式の根である, $\lambda=1,2$.

(2) **(i)** $\lambda=1$ のとき,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{階段化}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

よって, 固有空間 $V(\lambda)$ は $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を基底に持つ 1 次元の空間である.

(ii) $\lambda=2$ のとき,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{階段化}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる.

よって, 固有空間 $V(\lambda)$ は $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を基底に持つ 2 次元の空間である.

(3) (2) で求めた固有ベクトルを並べた行列を

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

受　験　番　号

$\boxed{\mathbf{2}}$ (解答)

(1) (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{階段化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\ker f$ の基底である.

よって, $\dim(\ker f) = 1$

(ii) 次元定理より, $\dim V = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$ が成り立つので,

$$\dim(\operatorname{im} f) = 3 - \dim(\ker f) = 3 - 1 = 2.$$

(iii) $\operatorname{im} f$ は (i) の計算により, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ を基底に持つ空間である.

$\operatorname{im} g$ は $\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ を基底に持つ空間である. ここで, $\boldsymbol{w} \in \operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g$ とすると,

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = d_1\boldsymbol{y}_1 + d_2\boldsymbol{y}_2$$

を満たす $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 &= d_1\boldsymbol{y}_1 + d_2\boldsymbol{y}_2 \\ c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 - d_1\boldsymbol{y}_1 - d_2\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{0} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{階段化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = d_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\boldsymbol{w} = d_1\boldsymbol{y}_1 + d_2\boldsymbol{y}_2 = d_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

逆に, この形のベクトルは全て $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g$ に含まれる. よって, $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g$ の基底

であり, $\dim(\operatorname{im} f \cap \operatorname{im} g) = 1$.

受　験　番　号

$\boxed{2}$ (解答)

(2) (解答)

数学的帰納法で示す.

(i) $n=1$ のとき $|a_0|=a_0$ であり, 等式は成立.

(ii) $n=k-1$ の時まで成立するとして, $n=k$ の場合を示す.

1 行目に沿って余因子展開をすると

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0x^n + (a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n))$$

$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

(3) (解答)

$\dim W_1 = 2$ より, W_1 の基底を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とする.

W_1, W_2 は相異なる空間と仮定しているので, $\boldsymbol{y}_1 \in W_2, \boldsymbol{y}_1 \notin W_1$ を満たす $\boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{0}$ が存在. $\boldsymbol{y}_1$ を延長して, 得られる W_2 の基底を $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ とする.

$\boldsymbol{y}_1 \notin W_2$ であることと $\dim V = 3$ であることから, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1$ は V の基底となる. よって,

$$\boldsymbol{y}_2 = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{y}_1$$

を満たす c_1, c_2, c_3 が存在し,

$$-c_3\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2$$

が成立. 左辺は, $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ が一次独立であり, $\boldsymbol{y}_2$ の係数が 1 であることから $\boldsymbol{0}$ でない. また, W_1, W_2 が部分空間であることから, $-c_3\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in W_2$, $-c_3\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 \in W_1$ である. よって, $-c_3\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \in W_1 \cap W_2$ であり, 非零のベクトルを含むので, $\dim W_1 \cap W_2 \geq 1$.

一方で, $W_1 \cap W_2 \subset W_1$ であることから $1 \leq \dim W_1 \cap W_2 \leq \dim W_1 = 2$.

$\dim W_1 \cap W_2 = 2 = \dim W_1$ とすると, $W_1 \cap W_2 = W_1$ が成り立ち, $W_1 \subset W_2$ となり, $\dim W_1 = \dim W_2$ であることから, $W_1 = W_2$. これは仮定の相異なることに矛盾. よって, $\dim W_1 \cap W_2 \neq 2$

以上より, $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.

受　験　番　号

$\boxed{1}$ **(1)** 任意の $a, b \in I$ $(b > a)$ に対して, 平均値の定理を用いると

$$\frac{f'(b) - f'(a)}{b - a} = f''(c) > 0$$

となるので $f'(b) > f'(a)$ である。

(2) $g(x) := f(x) - x$ とおくと $g''(x) = f''(x) > 0$ なので g は I 上で下に凸であることがわかる。また $g(\alpha) = g(\beta) = 0$ より $g(x) < 0$ であることがわかる.

(3) $I = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ として $\alpha = 0$, $\beta = 1$ とすればよい.

$\boxed{2}$ **(1)** $f_x = -\sin x \sin y, \quad f_y = \cos x \cos y$

(2) $f_x(x, y) = -\sin x \sin y$, $f_y(x, y) = \cos x \cos y$ なので $f(x, y)$ の臨界点は $(x, y) = (m\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi)$, $(\frac{\pi}{2} + m\pi, n\pi)$ である. 従って求める D 上の臨界点は

$$P_1 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_2 = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad P_4 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

である.

(3) それぞれの臨界点における Hesse 行列 $H_f(P)$ は

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad H_f(P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

となる。従って $f(P_1) = 1$ で極大値, $f(P_2) = -1$ で極小値をとる.

(4) 計算により

$$g(x, y) = \cos(x + y)\sin(x - y) = f(x + y, x - y)$$

となる。従って (1) と (2) の結果によって

$$g\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) = 1, \quad g\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

が極値になる.

$\boxed{3}$ 変数変換 $u = 3x - 2y$, $v = -x + y$ を行うと f は $f(u, v) = u^2 + v^2$ となる. このとき

$$\begin{aligned}\iint_{D_{a,b}} f(x, y)\, dxdy &= \iint_{E_{a,b}} f(u, v)|A|\, dudv \\ &= 4(a + 1)^2 + 4(b + 1)^2 + \frac{8}{3}\end{aligned}$$

従って $(a, b) = (-1, -1)$ で極値 $\frac{8}{3}$ をとる.

受　験　番　号

$\boxed{1}$ **(1)** $\mathbb{Z}_6$ は位数 6 の巡回群であるから, 部分群は

$$\{\overline{0}\},\quad \{\overline{0},\overline{3}\},\quad \{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\},\quad \mathbb{Z}_6.$$

(2) 準同型定理 $\mathbb{Z}_4/\ker f \simeq f(\mathbb{Z}_4)$ より, $f(\mathbb{Z}_4)$ の位数は 4 の約数であるから, $f(\mathbb{Z}_4)$ は, $\{\overline{0}\}$ または $\{\overline{0},\overline{3}\}$.
求める準同型写像は全部で 2 つである:

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6, \quad f_1(\overline{1}) = \overline{0}, \\ f_2 &: \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_6, \quad f_2(\overline{1}) = \overline{3}. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ **(1)** 結合法則: $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in G$ に対して

$$\begin{aligned} ((a,b)*(a',b'))*(a'',b'') &= (a+a'+a'', (-1)^{a'+a''}b + (-1)^{a''}b' + b'') \\ &= (a,b)*((a',b')*(a'',b'')). \end{aligned}$$

単位元は $(0,0)$.
$(a,b) \in G$ の逆元は $(-a, (-1)^{-a+1}b)$.

(2) 可換群ではない. 例えば, $(1,2)*(3,4) = (4,2), (3,4)*(1,2) = (4,-2)$ であるから,
$(1,2)*(3,4) \neq (3,4)*(1,2)$.

(3) $(a,b) \in G$ と $(0,c) \in N$ に対して, $(a,b)*(0,c)*(a,b)^{-1} = (0,c) \in N$.

(4) 巡回群である. $(a,b) = (a,0)*(0,b)$ より, $(a,b)N = (a,0)N = ((1,0)N)^a$.

受　験　番　号

２０２６年度　岡山理科大学大学院　修士課程一般入試（I 期）
理工学研究科 自然科学専攻 数理科学コース（解答用紙）

$\boxed{1}$ 空間曲線

(1) $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (3, 2t-3, 2-2t)$, $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (0, 2, -2)$, $\dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (0, 0, 0)$, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (6, 6, 6)$,
$|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)| = \sqrt{18 - 12t + 8t^2}$ より

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|^3} = \frac{6\sqrt{3}}{(18-12t+8t^2)^{\frac{3}{2}}},\ \tau(t) = \frac{\det(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t))}{|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)|^2} = 0.$$

(2) $\tau(t) \equiv 0$ より，平面曲線になる．

$\boxed{2}$ **(1)** $\boldsymbol{p}$ の偏微分は,

$$\boldsymbol{p}_u = (f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)),\ \boldsymbol{p}_v = (-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0).$$

また u は弧長パラメータより $(f')^2 + (g')^2 = 1$ なので

$$E = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_u = (f')^2 + (g')^2 = 1,\ F = \boldsymbol{p}_u \cdot \boldsymbol{p}_v = 0,\ G = \boldsymbol{p}_v \cdot \boldsymbol{p}_v = f^2$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_{uu} = (f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)),\ \boldsymbol{p}_{uv} = (-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0),\\
&\boldsymbol{p}_{vv} = (-f(u)\cos v, -f(u)\sin v, 0).\\
&\boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{p}_v = (-fg'\cos v, -fg'\sin v, ff'),\ |\boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{p}_v| = \sqrt{f^2\left((g')^2 + (f')^2\right)} = f\\
&\boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{p}_v}{|\boldsymbol{p}_v \times \boldsymbol{p}_v|} = (-g'\cos v, -g'\sin v, f')
\end{aligned}$$

より $L = \boldsymbol{p}_{uu} \cdot \boldsymbol{\nu} = -f''g' + f'g''$, $M = \boldsymbol{p}_{uv} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, $N = \boldsymbol{p}_{vv} \cdot \boldsymbol{\nu} = fg'$.

(3) u は弧長パラメータより，$f'^2 + g'^2 = 1$. 両辺を微分すると $f'f'' + g'g'' = 0$. これらの式と (1),(2) を代入して

$$\begin{aligned}
K &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-f''g'^2 + f'g'g''}{f} = \frac{-f''g'^2 - f'^2f''}{f} = \frac{-f''(g'^2 + f'^2)}{f} = -\frac{f''}{f}\\
H &= \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f} + \frac{-f''g'^2 + f'g'g''}{g'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f} - \frac{f''(g'^2 + f'^2)}{g'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{f} - \frac{f''}{g'}\right)
\end{aligned}$$

(4) $x = \cos u,\ z = \sin u \quad (u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$

(5) $f = \cos u, g = \sin u$ に対応するので $f' = -\sin u$, $f'' = -\cos u$, $g' = \cos u$. (3) を使って $K = 1$, $H = 1$.

受　験　番　号

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 微分方程式 $y' = \dfrac{y}{1-x}$ の一般解を求めよ．

（解答） 微分方程式 $y' = \dfrac{y}{1-x}$ は変数分離形であり，$y(x) \equiv 0$ は自明解である．$y \neq 0$ のとき，両辺を y で割り，さらに両辺を積分すると，

$$\log|y| = -\log|1-x| + C_1, \quad \text{すなわち}, \quad \log|(1-x)y| = C_1.$$

よって，$|(1-x)y| = e^{C_1}$ であるから，$C_2 = \pm e^{C_1}$ （$C_2 \neq 0$）とおくと，

$$y = \frac{C_2}{1-x} \quad (C_2 \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}).$$

もし，$C_2 = 0$ のとき，これは自明解に対応するため，結局，一般解は

$$y(x) = \frac{C}{1-x} \quad (C \text{ は任意定数}).$$

(2) 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = 0$ の一般解を求めよ．

（解答） 特性方程式 $(\lambda-3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ は重解 $\lambda = 3$ をもつ．したがって，一般解は

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{3x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

(3) 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ の解を $y(x)$ とし，(2) の微分方程式の解を $w(x)$ とするとき，$y(x) + w(x)$ は微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ の解になることを示せ．

（解答） $z(x) = y(x) + w(x)$ とおく．$y(x)$ と $w(x)$ は

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = f(x), \quad w''(x) - 6w'(x) + 9w(x) = 0$$

を満たすから，$z(x)$ を微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned}
z''(x) - 6z'(x) + 9z(x) &= (y(x)+w(x))'' - 6(y(x)+w(x))' + 9(y(x)+w(x)) \\
&= (y''(x)+w''(x)) - 6(y'(x)+w'(x)) + 9(y(x)+w(x)) \\
&= (y''(x) - 6y'(x) + 9y(x)) + (w''(x) - 6w'(x) + 9w(x)) \\
&= f(x) + 0 = f(x).
\end{aligned}$$

よって，$y(x) + w(x)$ は微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = f(x)$ の解である．

(4) 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = 5e^{2x}$ の一般解を求めよ．

（解答） 特殊解 y_p を求める．右辺が $5e^{2x}$ なので，$y_p = Ae^{2x}$ の形で推測する．$y_p' = 2Ae^{2x}$，$y_p'' = 4Ae^{2x}$ を微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = 5e^{2x}$ に代入すると，

$$5e^{2x} = 4Ae^{2x} - 6(2Ae^{2x}) + 9(Ae^{2x}) = (4A - 12A + 9A)e^{2x}$$

であるから，$Ae^{2x} = 5e^{2x}$ を得る．よって，$A = 5$ となり，特殊解は $y_p(x) = 5e^{2x}$ である．(2) で得た同次方程式の一般解と, (3) で得た事実より，一般解は

$$y(x) = (C_1 x + C_2)e^{3x} + 5e^{2x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

受　験　番　号

1 以下の問いに答えよ（続き）.

(5) 微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ の一般解を求めよ.
（解答） 特殊解 y_p を求める．特性方程式の解が $\lambda = 3$ の重解であり，右辺 e^{3x} は同次方程式の解に含まれる．加えて，xe^{3x} も解に含まれるため，$y_p = Ax^2e^{3x}$ の形で推測する．いま，

$$y_p' = A(2x + 3x^2)e^{3x}, \quad y_p'' = A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x}$$

を微分方程式 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 6y_p'(x) + 9y_p(x) &= A(2 + 12x + 9x^2)e^{3x} - 6A(2x + 3x^2)e^{3x} + 9Ax^2e^{3x} \\ &= Ae^{3x}\left\{(9 - 18 + 9)x^2 + (12 - 12)x + 2\right\} = 2Ae^{3x}. \end{aligned}$$

これが右辺 e^{3x} に等しいので，$2Ae^{3x} = e^{3x}$ より，$A = 1/2$ となる．よって，特殊解は $y_p(x) = x^2e^{3x}/2$ である．(2) で得た同次方程式の一般解と, (3) で得た事実より，一般解は

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^{3x} + \frac{1}{2}x^2e^{3x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2\right)e^{3x} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

2 以下の問いに答えよ.

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ の定義を ε–δ 論法を用いて書け.
（解答） ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta(\varepsilon) > 0, 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

(2) $\lim_{x\to 3} 2x = 6$ を ε–δ 論法を用いて示せ.
（解答） ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ と定める．$0 < |x - 3| < \delta(\varepsilon)$ ならば,

$$|f(x) - 6| = |2x - 6| = |2(x - 3)| = 2|x - 3| < 2\delta(\varepsilon) = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって，$\lim_{x\to 3} 2x = 6$ である.

(3) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ を ε–δ 論法を用いて示せ.
（解答） ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) = \min\{\varepsilon/5, 1\}$ と定める．$0 < |x - 2| < \delta(\varepsilon)$ ならば,

$$\begin{aligned} |f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| &= |(x - 2)(x - 2 + 4)| \le |x - 2|(|x - 2| + 4) \\ &< \delta(\varepsilon)(\delta(\varepsilon) + 4) \le \delta(\varepsilon)(1 + 4) = 5\delta(\varepsilon) \le 5 \cdot \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

よって，$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ である.

(4) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるという定義を ε–δ 論法を用いて書け.
（解答） ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta(\varepsilon) > 0, |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

(5) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であり，$f(a) < 0$ を満たすとする．このとき，$x = a$ のある近傍で $f(x) < 0$ となることを示せ.
（解答） 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続であるから, ${}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists\delta(\varepsilon) > 0, |x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
すなわち,

$$|x - a| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

である．ここで，ε を特に $\varepsilon = |f(a)|$ と選べば，$|x - a| < \delta(|f(a)|)$ となる任意の x に対して,

$$f(x) < f(a) + \varepsilon = f(a) - f(a) = 0.$$

したがって，$|x - a| < \delta(|f(a)|)$ を満たす x の集合（$x = a$ の近傍）において $f(x) < 0$ が成り立つ.

受　験　番　号

２０２６年度　岡山理科大学大学院　修士課程一般入試（I 期）
理工学研究科 自然科学専攻 数理科学コース（解答用紙）

1

(1) $168 = 128 + 32 + 8 = 2^7 + 2^5 + 2^3 = 10101000_{(2)}$

(2) $11100001_{(2)} = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^0 = 225$

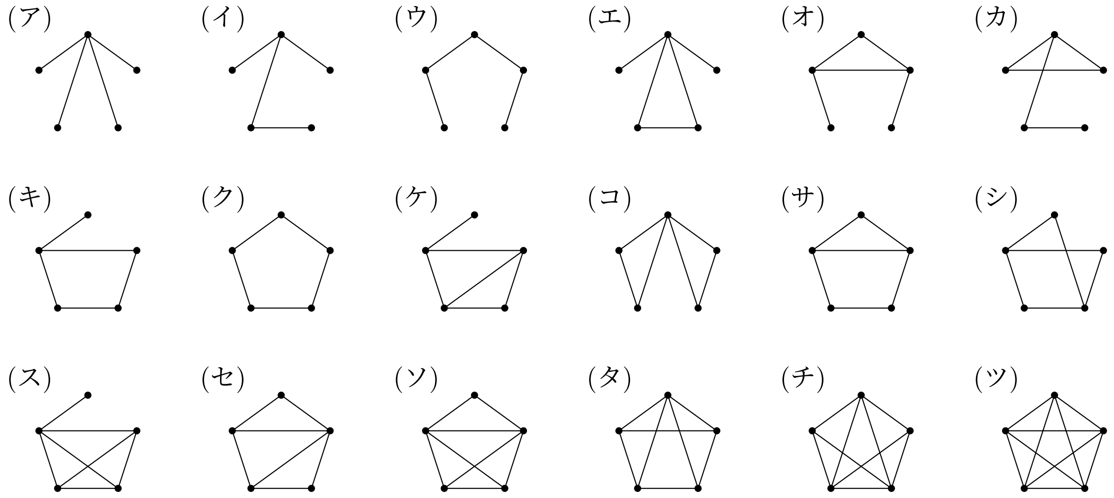
(3) $a = 40.\dot{1}_{(5)}$ とおくと、$10a = 401.\dot{1}_{(5)}$ なので、差をとると $4a = 311_{(5)}$ なので、$4a = 81$ となり、$a = 20.25$ である。

(4) ネットワークアドレスは 192.168.1.192 で、ブロードキャストアドレスは 192.168.1.255 である。

(5) 1 ビットで 2 種類、2 ビットで 4 種類なので、26 種類なら 32 種類扱える 5 ビット

(6) $44100 \times 16 \times 180 \times 2$(ビット) $= 31752000$(バイト) $= 31007.8125$(K バイト) $= 30.2810$(MB) なので、約 30MB である。

2



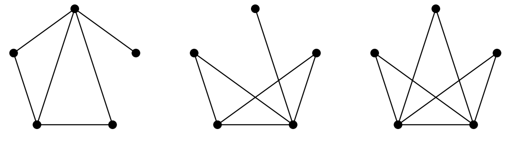
(1) 正則グラフは、(ク), (ツ)

(2) オイラーグラフは、(ク), (コ), (ツ)

(3) 最小カットセットの要素数が 2 のグラフは、(ク), (コ), (サ), (シ), (セ), (ソ)

(4) 辺数を考えると、4〜10 本までである。辺の数が 4 本で、最高次数が $4, 3, 2$ で考えると (ア),(イ),(ウ) で尽きる。これらに辺を 1 本加えて辺数が 5 のグラフを考えると、(ア) → (エ)、(イ)→ (エ),(オ),(カ),(キ)、(ウ) → (ク),(オ),(キ) に移る。

同様に、(エ),(オ),(カ),(キ),(ク) に辺を 1 本加えて辺数が 6 のグラフを考えると、(エ）から左下のグラフに移るが、上記に無い。同様に考えて行くと以下の 3 つが無いことがわかる。



それぞれの次数列は $(4, 3, 2, 2, 1), (4, 3, 2, 2, 1), (4, 4, 2, 2, 2)$ であり、辺の数は $6, 6, 7$ となっている。

受　験　番　号